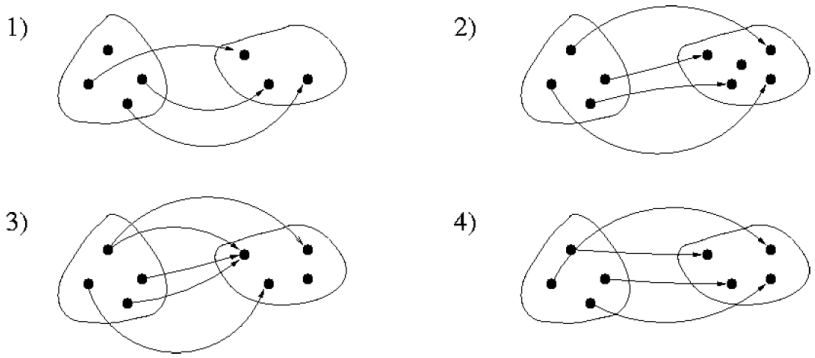
Dr. A. Blazhev Jun.-Prof. Dr. Dirk Witthaut

10. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2017/18 http://www.ikp.uni-koeln.de/~blazhev/vorkurs1718

1. Definition von Funktionen

(a) Welche der folgenden Zuordnungvorschriften sind Funktionen?



(b) Welche der Funktionen aus (a) sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?
(c) Betrachten wir ein Telefonbuch / eine Kontaktliste auf dem Handy. Ist die Zuordnungsvorschrift Kontakt $\mapsto$ Telefonnummer eine Funktion? Ist die umgekehrte Zuordnungsvorschrift Telefonnummer $\mapsto$ Kontakt eine Funktion?

2. Definition von Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch die implizite Gleichung

$$[f(x)]^2 - 4xf(x) + 4x^2 - 4 = 0,$$

außerdem wissen wir, dass $f(0) = 2$. Wie lautet die explizite Funktionsgleichung $f(x) = \ldots$? Lassen Sie sich nicht durch die ungewohnte Notation verunsichern. Schreiben Sie einfach mal y als Abkuerzung fuer $f(x)$ und versuchen nach y aufzuloesen.

3. Eigenschaften von Funktionen

Sind die folgenden Funktionen injektiv und surjektiv? Wenn moeglich, geben Sie die Umkehrfunktion an!

$$\begin{aligned}
&(a) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = e^x \\
&(b) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto y = f(x) = e^x \\
&(c) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = x^2 \\
&(d) \quad f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto y = f(x) = x^2
\end{aligned}$$

[Bitte wenden.]

4. Monotonie

(a) Welche der folgenden Funktionen ist monoton, welche sogar streng monoton?

$$(1)\ f : \mathbb{R}\ \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$
$$(2)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$$
$$(3)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$$

(b) Zeige: Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Ist umgekehrt auch jede injektive Funktion streng monoton?

5. Stetigkeit

Sind die folgenden Funktionen stetig? Zeichnen Sie den Graph der Funktion – finden Sie Sprungstellen? Pruefen Sie fuer mindestens eine der Funktionen die Stetigkeit auch mit dem ε-δ-Kriterium. Dabei knnen Sie sich auf den fraglichen Punkt $x_0 = 0$ konzentrieren:

$$(a) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{fuer} \quad x > 0 \\ x & \qquad\quad\ \ x \leq 0 \end{cases}$$
$$(b) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto y = f(x) = x \cdot h(x),$$

wobei $h(x)$ die in der Vorlesung eingefuehrte Sprungfunktion ist.