11. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2017/18 http://www.ikp.uni-koeln.de/~blazhev/vorkurs1718

1. Verkettung von Funktionen

Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} (a) \quad & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = -x^2 \\ (b) \quad & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto y = f(x) = e^x. \end{aligned}$$

Geben Sie die explizite Funktionsgleichung fuer die verkettete Funktion $g \circ f$ an. Was ist der Definitions- und der Wertebereich? Skizzieren Sie den Graph der Funktionen f, g und $g \circ f$.

2. Umkehrfunktion

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-1}\,.$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion (1) explizit rechnerisch (2) grafisch: Zeichnen Sie den Graph der Funktion f und spiegeln Sie diesen dann an der Winkelhalbierenden.

(b) In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $b, c \in \mathbb{R}$.

3. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen (bzgl. x) von:

$(a)\ 7x^3 + 4x + 2$	$(b)\ \dfrac{x^2+3}{x+2}$	$(c)\ a^x$
$(d)\ \sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$	$(e)\ e^{x \sin x}$	$(f)\ \sin(x)\cos(x)$
$(g)\ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$	$(h)\ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$(i)\ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Hinweis: Bei (c) können Sie benutzen dass $a = e^{\ln a}$ und bei (d) können Sie die Wurzeln als Potenz umschreiben, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

4. Quotientenregel

(a) Zeigen Sie für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Quotientenregel

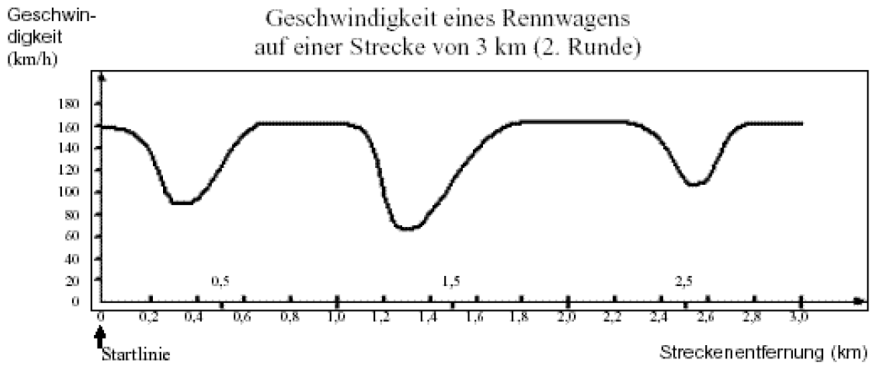
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,.$$

ausgehend von der Produkt- und Kettenregel.

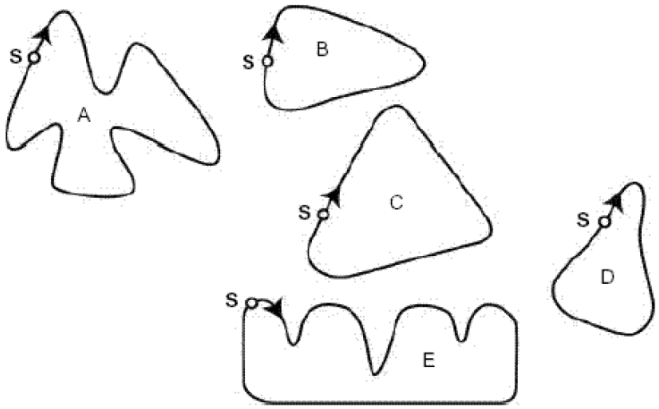
(b) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

5. Ableitung und Geschwindigkeit

Der folgende Graph zeigt, wie sich die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



Auf welcher der folgenden fünf Rennstrecke fuhr der Wagen, so dass der gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



Hinweis: Dies ist eine Aufgabe aus dem PISA-Test 2000.