12. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2017/18 http://www.ikp.uni-koeln.de/~blazhev/vorkurs1718

1. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$ auf Nullstellen, Polstellen, Maxima, Wendepunkte und Asymptotik (d.h. das Fernverhalten von f für $x \to \pm\infty$). Fertigen Sie für a = 1 eine Skizze der jeweiligen Graphen an.

(a) $f(x) = x + \frac{a}{x}$

(b) Die Fermi-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax}+1}$

(c) Die Bose-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax}-1}$

2. Quadratische Näherung

Berechnen Sie mit der quadratischen Näherung $\sqrt[3]{2}$.

3. Taylorpolynom

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ für $x \approx 0$ durch

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$$

approximiert wird.

4. Differentialgleichungen

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0.$$

(a) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die Funktionen $f(x) = a_1 \cos(\omega x) + a_2 \sin(\omega x)$ die Differentialgleichung erfüllt. Dabei sind a_1 und a_2 zwei beliebige Konstanten.

(b) Nun seien die Anfangsbedingungen gegeben. Das heißt, wir wissen den Funktionswert und die Ableitung bei $x = 0$:

$$f(x = 0) = f_0 \qquad \text{und} \qquad f'(x = 0) = v_0.$$

Wie müssen wir die Konstanten a_1 und a_2 wählen, damit diese Anfangsbedingungen erfüllt werden?

[Bitte wenden.]

5. Zusatzaufgabe: Konvergenz von Funktionen

Die Definition des Grenzwertes für Folgen kann folgendermaßen auf Funktionen erweitert werden. Die Funktion $f(x)$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen den Wert g

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

dann und nur dann, wenn

$$\text{für alle Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ gilt: } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

In Worten: Für jede Folge (x_n), die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))$ der Bilder gegen g.

Hiermit kann man nun die Stetigkeit definieren:

$$f \text{ stetig an der Stelle } x_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0} = f(x_0)$$

In Worten: Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 stimmt mit dem Funktionswert überein.

(a) Zeige für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$(i): \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1, \qquad (ii): \quad \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

(b) Zeige, dass die in der Vorlesung eingeführte Heaviside'sche Sprungfunktion $h(x)$ bei $x_0 = 0$ nicht stetig ist.